04 *Lógica proposicional: Regras de manipulação■*

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Resultado 1: Se A e $(A \to B)$ são tautologias, então B também é uma tautologia.

Demonstração:

Suponha que A e $A \to B$ são tautologias, mas B não.

Isto implica que existe uma atribuição de valores às variáveis proposicionais de A ou de B que faz com que B assuma o valor F.

Mas por hipótese, A só assume o valor V, assim, teremos uma atribuição em que $A \to B$ assume o valor F, contrariando o fato de que $A \to B$ é uma tautologia. ■

Resultado 2: Sejam A uma fórmula em que aparecem as variáveis proposicionais $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fórmulas quaisquer. Se A é uma tautologia, então podemos substituir cada p_i por A_i, $1 \leq i \leq n$, de tal modo que a fórmula obtida após essa substituição (vamos chamá-la de B) continua sendo uma tautologia.

Exemplo: $p_1 \vee (\neg p_1)$ é uma tautologia.

Assim, podemos substitui a variável proposicional p_1 por qualquer fórmula A_1que a fórmula resultante será uma tautologia.

Por exemplo, tomamos A_1como sendo $(q \to r)$:

$(q \to r) \vee \left(\neg(q \to r)\right)$ será uma tautologia.

Resultado 2: Sejam A uma fórmula em que aparecem as variáveis proposicionais $p_1, p_2, \dots, p_n$ e $A_1, A_2, \dots, A_n$ fórmulas quaisquer. Se A é uma tautologia, então podemos substituir cada p_i por A_i, $1 \leq i \leq n$, de tal modo que a fórmula obtida após essa substituição (vamos chama-la de B) continua sendo uma tautologia.

Demonstração:

Sejam A tautologia em que aparecem as variáveis proposicionais $p_1, p_2, \dots, p_n$ e $A_1, A_2, \dots, A_n$ fórmulas quaisquer.

As variáveis proposicionais de B são as variáveis proposicionais de cada A_i.

Assim, atribuímos qualquer valor às variáveis proposicionais de $A_1, A_2, \dots, A_n$.

O valor verdade de B será o mesmo de A (V) se os valores de de $A_1, A_2, \dots, A_n$ forem atribuídos a $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Portanto, B assume o valor V para qualquer atribuição de valores às suas variáveis proposicionais. ■

Resultado 3: Para quaisquer fórmulas A e B, segue que:

a) $\left(\neg(A \,\&\, B)\right)$ é logicamente equivalente a $((\neg A) \vee (\neg B))$

b) $(\neg(A \vee B))$ é logicamente equivalente a $((\neg A) \,\&\, (\neg B))$

Demonstração:

Primeiramente, pela tabela verdade, podemos mostrar que as fórmulas

$(\neg(p \,\&\, q)) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ e $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow ((\neg p) \,\&\, (\neg q))$

são tautologias.

Logo, pelo resultado anterior, podemos substitui p e q por quaisquer fórmula A e B que as fórmulas obtidas

$(\neg(A \,\&\, B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ e $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \,\&\, (\neg B))$

continuam sendo tautologias. Pela definição de equivalência lógica, segue o resultado.■

Outros resultados que você pode obter:

Para quaisquer fórmulas A, B e C, os seguintes pares de fórmulas são logicamente equivalentes:

$a)$ $(A \,\&\, B)$ e $(B \,\&\, A)$

$b)$ $(A \lor B)$ e $(B \lor A)$

$c)$ $(A \,\&\, (B \,\&\, C))$ e $((A \,\&\, B) \,\&\, C)$

$d)$ $(A \lor (B \lor C))$ e $((A \lor B) \lor C)$

$e)$ A e $\neg(\neg A)$

Resultado 4: Sejam A e B duas fórmulas logicamente equivalentes. Se substituirmos uma ou mais ocorrências de A por B em uma fórmula H que possui A como subfórmula(s), essa nova fórmula G é logicamente equivalente a H.

Exemplo: $A = (p \,\&\, p)$, $B = p$.

Temos que A e B são logicamente equivalentes ($A \leftrightarrow B$ é tautologia).

Consideremos a fórmula $H = ((p \,\&\, p) \rightarrow q)$.

Substituindo A por B em H, temos $G = (p \rightarrow q)$.

Pelo teorema, H e G são logicamente equivalentes.

Resultado 4: Sejam A e B duas fórmulas logicamente equivalentes. Se substituirmos uma ou mais ocorrências de A por B em uma fórmula H que possui A como subfórmula(s), essa nova fórmula G é logicamente equivalente a H.

Demonstração:

Sejam A e B duas fórmulas logicamente equivalentes, H e G duas fórmulas como diz o teorema.

Queremos mostrar que $H \leftrightarrow G$ é uma tautologia.

Atribuímos qualquer valor verdade às variáveis proposicionais envolvidas.

Note que H difere de G apenas nas ocorrências de A em H que foram substituídas pela fórmula B em G.

Como A e B são logicamente equivalentes, elas assumem o mesmo valor verdade. Desse modo, G e H assumem também o mesmo valor verdade.

Portanto, $H \leftrightarrow G$ assume valor V para qualquer atribuição de valores. ■

Resumo

- Se A e $A \to B$ são tautologias, então B é uma tautologia.

- Se A é uma tautologia, então podemos substituir suas variáveis proposicionais por qualquer fórmula. A fórmula resultante será uma tautologia.

- Se A e B são logicamente equivalentes, podemos substituir uma ou mais ocorrências de A por B em qualquer fórmula H que possui A como subfórmula. A fórmula resultante será logicamente equivalente a H.

04 *Lógica proposicional: Regras de manipulação*■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br